E.N.S.I. de PHYSIQUE option P session 1987

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986 .

On considère l'équation différentielle linéaire

(H) $\quad x(x-1)y'' + (2x-1)y' + \frac{y}{4} = 0$;

on appelle solution de l'équation différentielle (H) sur un intervalle ouvert $I =]\alpha,\beta[$, toute fonction $u :]\alpha,\beta[\to R$, deux fois continûment dérivable, vérifiant pour tout $x \in]\alpha,\beta[$ l'égalité

$$x(x-1)u''(x) + (2x-1)u'(x) + \frac{1}{4}u(x) = 0.$$

On se propose d'étudier les solutions de (H) sur les intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et de caractériser celles qui sont prolongeables en des solutions sur $]-\infty,1[$ ou $]0,+\infty[$.

I - Solutions obtenues à l'aide de séries entières.

I.1. Déterminer les solutions de (H) sur $]-1,+1[$ qui sont développables en série entière convergente sur cet intervalle. Prouver qu'il en existe une et une seule, notée S , telle que $S(0) = 1$.

I.2. Pour toute fonction u de classe C^2 définie sur un intervalle ouvert I de R , on note Δu la fonction définie sur le même intervalle par

(1) $\quad (\Delta u)(x) = x(x-1)u''(x) + (2x-1)u'(x) + \frac{1}{4}u(x).$

Soit σ la bijection de R sur lui-même définie par $\sigma(x) = 1-x$. Pour toute fonction f de classe C^2 sur un intervalle ouvert I , on note g la fonction définie sur $\sigma(I)$ par

(2) $\quad g(x) = f(1-x).$

a) Comparer $(\Delta g)(x)$ et $(\Delta f)(1-x)$. Indiquer comment les solutions de (H) sur $\sigma(I)$ se déduisent des solutions de (H) sur I.

b) Soit en particulier $T :]0,2[\to R$ la fonction définie par

(3) $\quad T(x) = S(1-x).$

Montrer que (S,T) est une base de l'espace vectoriel des solutions de (H) sur $]0,1[$. (On pourra comparer $S(1/2)$ et $T(1/2)$, $S'(1/2)$ et $T'(1/2)$.)

I.3. Soit τ la bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même définie par $\tau(x) = 1/x$. Pour toute fonction f de classe C^2 sur un intervalle ouvert I de $]0,+\infty[$, on note h la fonction définie sur $\tau(I)$ par

(4) $\quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\frac{1}{x}).$

En particulier, on désigne par $U :]1,+\infty[\to R$ la fonction définie par

(5) $\quad U(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} S(\frac{1}{x}).$

a) Calculer $(\Delta h)(x)$; comparer $x^{3/2}(\Delta h)(x)$ et $(\Delta f)(1/x)$. Indiquer comment les solutions de (H) sur $\tau(I)$ se déduisent des solutions de (H) sur I.

b) A partir de la base obtenue en I.2 pour l'espace vectoriel des solutions de (H) sur $]0,1[$, construire une base de l'espace vectoriel des solutions de (H) sur $]1,+\infty[$.

I.4. Construire une base de l'espace vectoriel des solutions de (H) sur $]-\infty,0[$.

II - Représentations intégrales des solutions.

Soit A la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par la relation

(6) $\quad A(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x \sin^2\theta}}$.

II.1. Prouver que A est de classe C^2 , croissante et convexe. Pour $x \in]0,1[$ et $\theta \in [0,\pi/2]$, vérifier l'inégalité

(7) $\quad \frac{1}{\sqrt{1 - x \sin^2\theta}} \geq \frac{\sin\theta \cos\theta}{1 - x \sin^2\theta}$;

prouver que l'on a $A(x) \geq -\frac{1}{\pi} \ln(1-x)$ si $x \in]0,1[$ et en déduire la limite de $A(x)$ lorsque $x \to 1$, $x < 1$.

II.2. Soit F la fonction de deux variables définie par

(8) $\quad F(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - x \sin^2\theta}}$ $\quad (x \in]-\infty,1[\; ; \; \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]).$

Tournez la page S. V. P.

Montrer la relation

(9) $\frac{1}{4}F(x,\theta) + (2x-1)\frac{\partial F}{\partial x}(x,\theta) + x(x-1)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{4}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(1-x\sin^2\theta)^{3/2}}\right]$.

En déduire que A est solution de (H) sur $]-\infty,1[$ et n'est pas prolongeable en une solution définie sur un intervalle plus grand.

II.3. Soit B la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

(10) $B(x) = A(1-x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + x\sin^2\theta}}$;

montrer que (A,B) est une base de l'espace vectoriel des solutions de (H) dans $]0,1[$. Caractériser dans cette base les solutions de (H) qui possèdent une limite finie quand $x \to 1$, $x < 1$. En déduire que les fonctions T et B coïncident sur $]0,1[$, ainsi que S et A.

II.4. Soit f une fonction de classe C^2 définie sur $]\alpha,1/\alpha[$, où $\alpha \in]0,1[$; on définit h par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que si f est solution de (H) sur $]\alpha,1/\alpha[$ et si $f(1) = 1$, on a alors $f = h = B$ sur $]\alpha,1/\alpha[$. En déduire que T et B coïncident sur $]0,2[$ et que S et A coïncident sur $]-1,+1[$.

b) Prouver les relations

(11) $B(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} B\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x>0)$,

(12) $A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} A\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad (x<1)$.

II.5. Montrer que toute solution de (H) sur $]0,+\infty[$ est colinéaire à B et que toute solution de (H) sur $]-\infty,1[$ est colinéaire à A. Montrer que (H) n'admet pas de solution non nulle sur R.

III - <u>Etude du comportement asymptotique des solutions</u>.

Soit G la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par

(13) $G(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sqrt{x-\sin^2\theta}\ d\theta$.

III.1. Montrer que G est continue sur $[1,+\infty[$, de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

Montrer que la dérivée de G est la fonction U définie en I.3. et que G vérifie sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle

(14) $x(x-1)\,G'' + \frac{1}{4}G = 0$.

III.2. Soit $x = 1+h$, $h>0$. En utilisant (14), prouver que l'on a

(15) $U'(1+h) \sim -\frac{1}{\pi h} \qquad (h \to 0 \ , \ h>0)$.

En déduire les relations asymptotiques suivantes :

(16) $U(x) \sim -\frac{1}{\pi}\,\text{£n}\,(x-1) \qquad (x \to 1 \ , \ x>1)$;

(17) $A(x) \sim -\frac{1}{\pi}\,\text{£n}\,(1-x) \qquad (x \to 1 \ , \ x<1)$;

(18) $B(x) \sim -\frac{1}{\pi}\,\text{£n}\,x \qquad (x \to 0 \ , \ x>0)$.

III.3. Déterminer la partie principale de U(x) et la partie principale de B(x) quand $x \to +\infty$.